

# AVISO:

O CONTEÚDO DESTAS NOTAS AINDA NÃO FOI DEVIDAMENTE REVISADO, PODENDO HAVER IMPRECIÇÕES. UMA VERSÃO MAIS ATUAL DEVERÁ ESTAR DISPONÍVEL EM ABRIL.

Qualquer dúvida, contate:

[romisri@decom.fee.unicamp.br](mailto:romisri@decom.fee.unicamp.br)

[cristia@decom.fee.unicamp.br](mailto:cristia@decom.fee.unicamp.br)

## Capítulo 5 – A Equação de Schrödinger

### 5.1 – A Equação de Schrödinger e seu Significado

Conforme vimos nos capítulos anteriores, a noção de dualidade trouxe impressionantes consequências para as idéias de radiação e matéria. No entanto, ainda havia muita coisa no ar após as propostas de Einstein para o fóton e a de de Broglie para as “ondas-guia” das partículas. Faltava um formalismo que fosse suficientemente abrangente, um pilar semelhante ao que são as leis de Newton para a mecânica ou as equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

Werner Heisenberg formulou, em 1925, uma abordagem que ficou conhecida como *mecânica das matrizes*. Nesta abordagem, de cujo desenvolvimento também participaram Max Born e Pascual Jordan, variáveis como posição, momento linear e energia são representadas através de matrizes, operadores não-comutativos. Esta característica dá suporte a aspectos quânticos, como as próprias incertezas que discutimos no capítulo anterior.

Uma outra formulação foi proposta por um físico austríaco, Erwin Schrödinger. Esta formulação, que é mais acessível matematicamente, baseia-se numa equação diferencial de segunda ordem, cuja solução é a famosa função de onda  $\Psi$ . Esta função de onda é uma expressão matemática do caráter ondulatório de uma partícula, algo que se buscava, como vimos, desde a proposta de de Broglie. O próprio Schrödinger mostrou que esta formulação era equivalente à mecânica das matrizes, o que consolidou os esforços teóricos dos pioneiros dos quanta. Daqui para a frente, analisaremos apenas a formulação baseada na equação de onda.

A partir da equação de Schrödinger, podemos obter soluções ondulatórias que nos fornecem informações cruciais sobre o comportamento de uma partícula-onda. São contempladas influências de forças externas, o que indica claramente o quão mais profunda é a concepção de Schrödinger em relação às ondas-guia de de Broglie.

Como afirma Krane em [Krane 1983], a equação de Schrödinger tem um papel análogo, na Mecânica Quântica, ao desempenhado na Física Clássica pela segunda lei de Newton, que relacionava, através de uma equação diferencial, força e posição de uma partícula. Resolver esta equação diferencial significava conhecer o futuro e o passado de uma partícula ou de um sistema de partículas. Do mesmo modo, resolver a equação de Schrödinger significa conhecer a forma da onda associada a uma partícula qualquer. No entanto, não significa, o que seria contraditório com o princípio da incerteza, conhecer arbitrariamente qualquer grandeza associada à partícula. Conhecer a expressão da função de onda, como veremos, é uma fonte de grande informação estatística sobre uma partícula qualquer.

Schrödinger não utilizou o termo “ondas-piloto” ou “ondas-guia”, mas sim a expressão mais “conservadora” de “função de onda”, terminologia que adotaremos para  $\Psi$ . Ele também não usou expressões relativísticas para momento, energia, etc., mantendo-se no domínio clássico, por assim dizer, ao contrário de de Broglie. No entanto, isto não provoca incoerências na abordagem.

Outra suposição fundamental é que a equação seja linear, ou seja, que se  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são soluções, então  $\Psi = a_1 \cdot \Psi_1 + a_2 \cdot \Psi_2$  também o será. Assim, permite-se uma superposição

de funções de onda, o que fornece uma explicação para padrões de interferência como os observados nos experimentos de Davisson-Germer, por exemplo. É de se esperar também que a função de onda seja “bem-comportada” matematicamente, ou seja, não apresente um comportamento descontínuo.

Como lidamos com ondas, também é muito razoável buscar uma equação que forneça soluções com componentes senoidais em muitos casos, que contêm o caráter oscilatório inerente à própria noção ondulatória.

Esqueçamos as dimensões  $y$  e  $z$  e pensemos apenas na dimensão  $x$  e na dimensão temporal  $t$ . Com base em todas estas considerações (e mais algumas que veremos depois como consequências), pode ser postulada a seguinte equação diferencial:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad (5.1)$$

sendo  $\hbar = h/2\pi$ ,  $m$  a massa da partícula,  $V(x,t)$  a energia potencial,  $i$  a raiz de -1 e  $\Psi(x,t)$  a desejada função de onda.

Assim, conhecer  $V(x,t)$  é o ponto crucial: a partir dele, recorreremos a (5.1) para obter a função de onda, da mesma forma que na mecânica clássica precisávamos conhecer a força exercida sobre a partícula para conhecer sua posição em todos os momentos que desejássemos.

Se supusermos que a função de onda tem uma dependência do tipo:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot \phi(t) \quad (5.2)$$

e que a energia potencial depende apenas de  $x$ , pode-se mostrar que  $\phi(t)$  deverá obedecer, a partir de (5.1), a uma equação de primeira ordem do tipo:

$$i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = C\phi(t) \quad (5.3)$$

sendo  $C$  um valor a determinar. A equação tem como solução funções do tipo:

$$\phi(t) = \exp(-2\pi i C t / \hbar) \quad (5.4)$$

A função  $\phi(t)$  mostrou uma dependência simples com relação ao tempo. Falta ainda determinar  $\psi(x)$ , o que fazemos através da equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (5.5)$$

sendo  $E$  a energia total da partícula (cinética =  $mv^2/2$  + potencial). É possível mostrar ainda que a constante  $C$  de (5.3) e (5.4) deve ser justamente igual a  $E$ .

A suposição feita em (5.2) é muito usual na resolução de equações diferenciais parciais, de modo que, nos exemplos que discutiremos, iremos nos concentrar na solução de

(5.5), e não de (5.1). Isto nos proporcionará um ambiente de trabalho dotado de maior simplicidade matemática.

Podemos dizer que quase toda a física da equação de Schrödinger está em (5.1) ou em (5.3) e (5.5); no trabalho de “quantificar”  $V(x)$  e  $E$  e escrever as equações. O próximo passo, a obtenção de  $\psi$ , é puramente matemático. No entanto, há muita física ainda no entendimento do significado desta função de onda.

Como dissemos, esta função é a expressão matemática mais sólida das ondas de matéria postuladas por de Broglie. No entanto, são ondas análogas, mas não idênticas às presentes em uma corda vibrante, por exemplo. Note que a função de onda é complexa, para início de conversa! Isto mostra que as analogias com ondas “clássicas” são úteis, mas requerem cuidado.

O que podemos aprender, tendo nas mãos a função de onda associada a uma partícula, numa certa configuração?

Max Born, em 1926, postulou uma interpretação para a função  $\Psi$  que ganhou ampla aceitação no meio científico, sendo parte importante da interpretação de Copenhagen, a mais usual até os dias de hoje. Basicamente, ele afirmou que [Eisberg, 1961]:

*Num instante  $t$  qualquer, a probabilidade de que a partícula associada à função de onda  $\Psi(x,t)$  esteja numa posição qualquer entre  $x$  e  $x + dx$  é dada por:*

$$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 dx \quad (5.6)$$

Eis aí uma interpretação revolucionária das ondas associadas a uma partícula. O módulo ao quadrado da função de onda é uma densidade de probabilidade da posição  $x$  de uma partícula, segundo a interpretação de Born!

Sendo o módulo ao quadrado uma densidade de probabilidade, ele deve obedecer à condição de normalização usual:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \quad (5.7)$$

Como  $\phi(t)$  tem módulo unitário (é uma exponencial complexa), no caso da equação independente do tempo, a condição de normalização se reduz a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (5.8)$$

como indica (5.2). Já temos uma primeira condição sobre nossa função de onda.

Suponhamos que estejamos lidando com a equação independente do tempo e queiramos conhecer a probabilidade de a partícula estar localizada entre as posições  $x = x_1$  e  $x = x_2$ . Pela própria definição de densidade de probabilidade, teremos:

$$p(x) = |\psi(x)|^2 \Rightarrow P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \quad (5.9)$$

Se quisermos conhecer a posição média da partícula, basta fazer:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x)dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 dx \quad (5.10)$$

Paremos para refletir um pouco, após tantos resultados. Partimos para obter uma equação que descrevesse adequadamente o caráter ondulatório associado a uma partícula qualquer. Obtivemos esta equação e também uma interpretação estatística muito forte para a função de onda obtida. Esta interpretação é crucial dentro da “visão de mundo” quântica, e daqui para frente é bom mantê-la em mente.

É interessante notar o que nos fornece a equação de Schrödinger: podemos conhecer, para cada instante de tempo, a densidade de probabilidade da localização de uma partícula (e poderíamos deduzir também a densidade de outra grandeza, como o momento linear), sendo esta evolução temporal regida por (5.1). Não temos mais, como na Física Clássica um conhecimento completo e determinístico, mas sim um conhecimento estatístico. Comprovações experimentais das previsões obtidas a partir de (5.1) podem envolver, por exemplo, múltiplas realizações de um experimento, para se buscar uma distribuição de resultados que possa ser comparada ao módulo ao quadrado da função de onda.

Uma lei fundamentalmente estatística, uma visão probabilística de mundo. Como vimos, isto não agradou a muitos cientistas como, por exemplo, Einstein. Este disse uma célebre frase: “Deus não joga dados com o mundo”. Muitos acreditavam que a Física Quântica era apenas uma teoria de transição, um modelo que seria suplantado por uma teoria mais completa, sem as indesejáveis restrições estatísticas ao conhecimento do mundo.

Após esta discussão introdutória, passemos à aplicação da equação a algumas situações clássicas, o que fomentará novas discussões.

## 5.2 – Aplicações da Equação de Schrödinger

### 5.2.1 – A Partícula Livre

A primeira aplicação clássica da equação é obter  $\psi(x)$  para uma “partícula livre”, ou seja, livre da influência de forças externas ( $F=0$ ). Como temos, em uma dimensão:

$$F = -dV(x)/dt \quad (5.11)$$

devemos ter  $V(x) = \text{constante}$ .

Podemos então fazer:

$$V(x) = 0 \quad (5.12)$$

o que nos leva, a partir de (5.5) a:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x) \quad (5.13)$$

sendo  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . A solução geral para (5.13) é do tipo:

$$\psi(x) = A.\text{sen}(kx) + B.\text{cos}(kx) \quad (5.14)$$

uma onda senoidal pura. A energia, de (5.13), vale:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (5.15)$$

Como não há restrições para o valor de  $k$ , a energia não é quantizada. Como  $V(x) = 0$ ,  $E$  é simplesmente a energia cinética. Na física clássica, a relação entre energia cinética e momento linear é simplesmente  $E_c = p^2/2m$ , o que nos permite inferir que o momento linear da partícula será:

$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \quad (5.16)$$

Ora, isto é o que esperávamos a partir da proposta de de Broglie! No entanto, surge um problema: como aplicar (5.8) a (5.14)? Esta integral não é determinável, não podendo ser obtida a condição de normalização. Este problema pode ser eliminado se supusermos a superposição de várias frequências, o que levaria a um pacote de onda como o da Fig. 4.8 do capítulo anterior, que reproduzimos aqui:

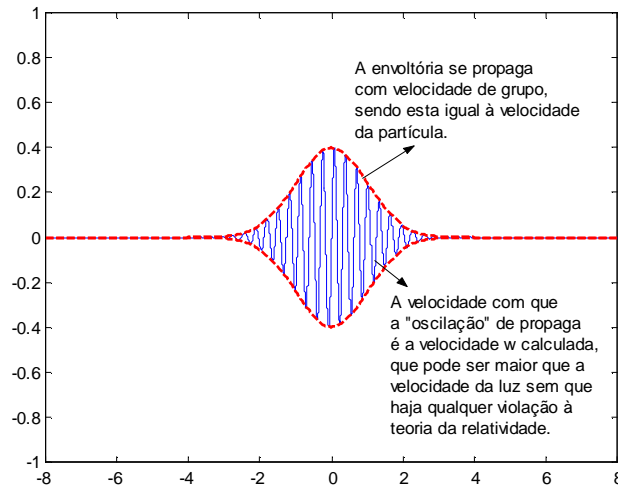
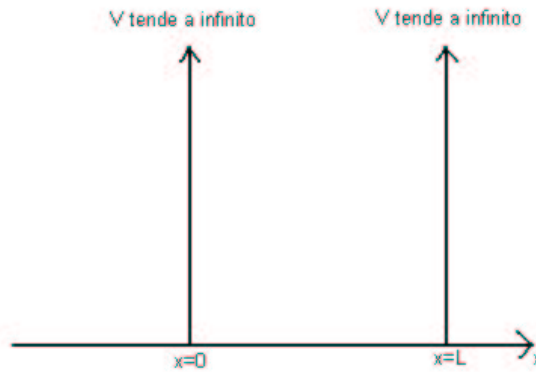


Figura 4.8 (Reproduzida neste capítulo por simplicidade)

### 5.2.2 – O Poço de Potencial Infinito

Suponhamos agora um caso mais interessante: o de uma partícula confinada em um poço de potencial com paredes de “altura” infinita. A Fig. 5.1 traz um diagrama esquemático:



**Figura 5.1:** Poço de Potencial Infinito

Temos, portanto:

$$V(x) = 0, \text{ para } 0 \leq x \leq L \text{ e } V(x) \rightarrow \infty, \text{ para } x \leq 0 \text{ e } x \geq L \quad (5.17)$$

Pela altura infinita dos “muros”, podemos afirmar que não há nenhuma chance de a partícula estar fora do poço entre  $x = 0$  e  $x = L$ . Assim,

$$\psi(x) = 0, \text{ para } x \leq 0 \text{ e } x \geq L \quad (5.18)$$

Dentro do poço, temos  $V(x) = 0$  e a mesma solução do caso da partícula livre, equações (5.14) e (5.15). No entanto, temos algumas condições a aplicar. A primeira é que a função  $\psi(x)$  seja nula nos limites do poço, para evitar descontinuidades em relação a (5.18). Desta forma, temos que ter:

$$\psi(0) = A.\text{sen}(0) + B.\text{cos}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (5.19)$$

e

$$\psi(L) = A.\text{sen}(kL) + B.\text{cos}(kL) = 0 \quad (5.20)$$

Aplicando a condição  $B = 0$ , obtida em (5.19), a (5.20), obtemos:

$$A.\text{sen}(kL) = 0 \quad (5.21)$$

Para fugir de uma solução trivial, resta-nos fazer:

$$\text{sen}(kL) = 0 \quad (5.22)$$

Portanto, temos que  $kL$  deve assumir os valores  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$  e assim por diante. Matematicamente:

$$kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.23)$$

Desprezamos valores negativos e nulos de  $n$  pois tínhamos em mente a relação  $k = 2\pi/\lambda$ .

O que temos em (5.23)? Basicamente, que a solução da equação de Schrödinger para um poço infinito nos fornece uma série de “ondas estacionárias de de Broglie”, cujos comprimentos de onda devem obedecer à relação:

$$\lambda = 2L/n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.24)$$

Não podemos deixar de notar a analogia com ondas em uma corda de violão, por exemplo. É um resultado muito interessante.

A partir de (5.23) e de (5.15), obtemos:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} \quad (5.25)$$

Neste caso, a energia é quantizada, ou seja, só podem ser assumidos valores de energia dentro de um repertório discreto. Sendo neste caso a energia puramente cinética, há um conjunto discreto de velocidades permitidas para a partícula (no entanto, cada velocidade pode ter ambos sentidos, o que ainda mantém uma incerteza)! Isto quer dizer que nossa partícula confinada não pode se mover com uma velocidade qualquer, o que não tem paralelo no mundo clássico. O número quântico  $n$  indica, por assim dizer, em que estado estacionário está a partícula. O estado com  $n = 1$  é chamado de *estado fundamental (ground state)*, e os demais são *estados excitados (excited states)*.

Já fizemos bastante, mas ainda falta determinar a constante  $A$ . Isto é feito utilizando a condição de normalização (5.8):

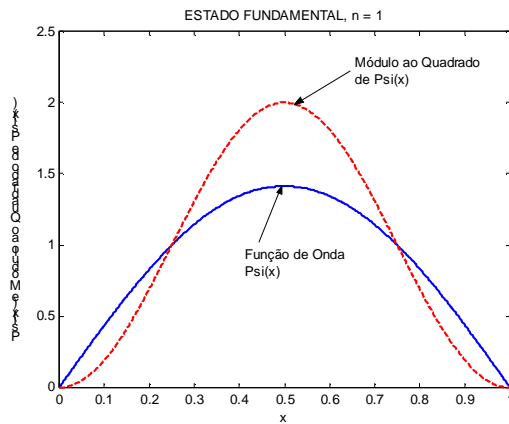
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (5.26)$$

Finalmente, temos a solução final:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), 0 \leq x \leq L \quad (5.27)$$

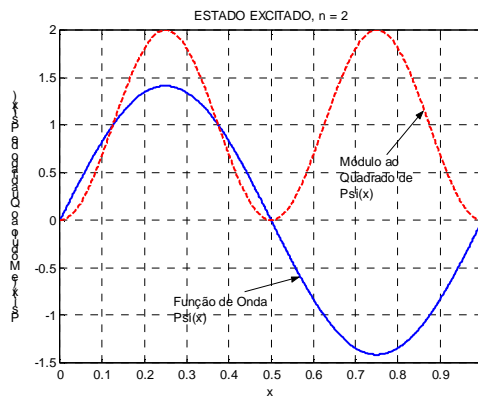
Supondo  $L = 1$ , temos, para  $n = 1$ ,  $\psi(x)$  e  $|\psi(x)|^2$  na Fig. 5.2.





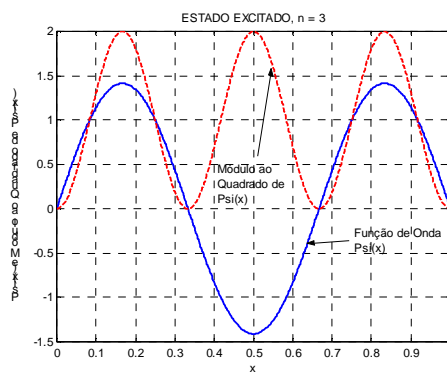
**Figura 5.2:** Estado Fundamental

Para  $n = 2$ , temos:



**Figura 5.3:** Estado Excitado,  $n = 2$

Para  $n = 3$ , temos:



**Figura 5.4:** Estado Excitado,  $n = 3$

E assim por diante. Alguns aspectos muito interessantes merecem ser frisados. Vemos nitidamente nos gráficos que as funções de onda são ondas estacionárias, como já

esperávamos a partir de nossa análise matemática. Vemos também que, para cada estado de energia, há uma configuração probabilística distinta, o que também não é surpreendente.

Algo interessante pode ser visto nas duas últimas figuras. Na Fig. 5.3, por exemplo, vemos que a probabilidade de a partícula estar em uma vizinhança infinitesimal de  $x = 0.5$  é nula. No entanto, ela tem uma probabilidade não-nula de estar nas regiões  $x < 0,5$  e  $x > 0,5$ . Ora, somos obrigados a aceitar que ela pode transitar entre as duas regiões sem jamais estar em uma vizinhança infinitesimal de  $x = 0.5$ ! Isto parece muito estranho, mas precisamos nos lembrar que toda a nossa confusão dentro do mundo quântico só decorre de nossa intuição moldada na concepção clássica de partícula.

O exemplo do poço infinito é muito rico, dele emergindo a quantização da energia e uma rica visão probabilística, para ficar em dois aspectos. Podemos notar o que pode nos dar a equação de Schrödinger num problema bem simples.

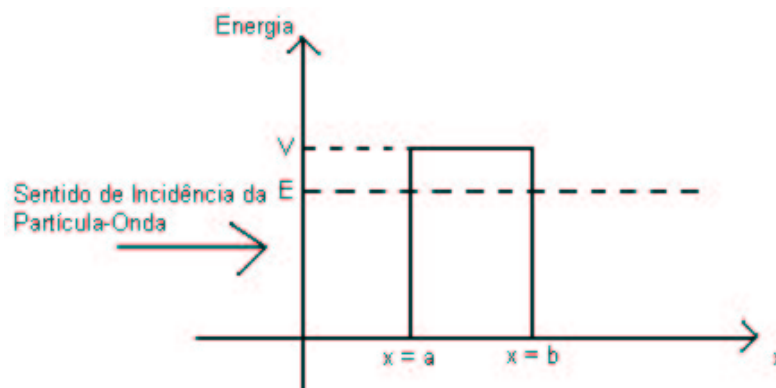
Poderíamos equacionar muitas outras situações, algumas mais interessantes que as outras. No entanto, acreditamos que estes dois exemplos, principalmente o segundo, mostram bem como se procede, via de regra, na resolução de um problema quântico. Passaremos então a um outro resultado interessante, cuja explicação também depende da mecânica ondulatória.

### 5.3 – O Efeito Túnel

Algumas vezes ouvimos falar que a Física Quântica prevê que as partículas podem se comportar como fantasmas, atravessando “paredes de potencial” mais altas do que sua própria energia. A clássica analogia é com uma pessoa que corre contra uma parede e, miraculosamente, a atravessa.

Procuraremos formalizar o que isto, o *efeito túnel*, quer dizer, e apontaremos algumas aplicações práticas deste efeito.

Até agora, o mais longe que fomos em termos da função  $V(x)$  foi considerá-la infinita ou nula. No entanto, em muitos casos de interesse, devemos considerar esta função como, por exemplo, um degrau finito. Na Fig. 5.5, temos um exemplo deste caso:



**Figura 5.5:** Barreira Finita de Potencial

Nesta figura,  $E$  é a energia total da partícula e  $V$  a energia potencial da barreira entre  $x = a$  e  $x = b$ . Como vemos, a partícula não tem energia suficiente para romper a barreira e chegar à região  $x > b$ .

Porém, se resolvermos a equação de Schrödinger, para  $V(x)$  como na Fig. 5.5, é possível mostrar que há uma probabilidade não-nula de a partícula, mesmo com  $E < V$ , estar na região  $x > b$ . Novamente, temos uma ruptura com o mundo clássico, onde isto não poderia acontecer em hipótese alguma.

Como pode uma partícula com energia menor que  $V$  ultrapassar a barreira? Ora, toda estranheza está justamente no emprego do conceito de “partícula”. Caso pensemos em uma onda, a coisa não é tão estranha assim, como tentaremos mostrar adiante.

A probabilidade de uma partícula onda com energia  $E$  ultrapassar a barreira é dada, aproximadamente, por:

$$T \approx \exp(-2KL) \quad (5.28)$$

sendo  $L$  a largura da barreira ( $L = b-a$ ) e  $K$ :

$$K = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(V - E)}{h^2}} \quad (5.29)$$

Em termos de ondas clássicas, podemos fazer uma analogia entre  $T$  e o coeficiente de transmissão da onda quando de sua incidência sobre um meio qualquer. Esta analogia condiz exatamente com a abordagem da mecânica ondulatória, para a qual a partícula nada mais é que um pacote de ondas que incide sobre uma barreira, sendo passível de transmissão.

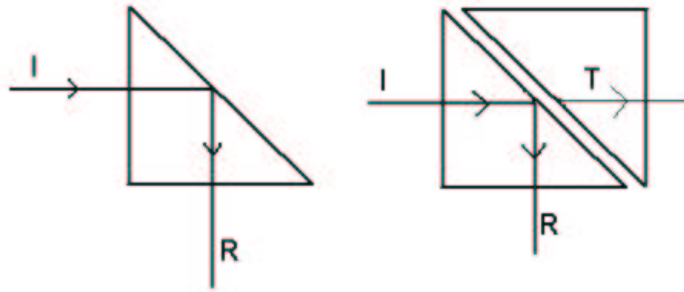
Percebemos que é tão mais fácil “tunelar” por uma barreira quanto menor for a diferença de energia  $V - E$  e a largura  $L$ , o que é bastante intuitivo. Resta então perguntar: a Física Quântica burlou a conservação da energia?

Uma resposta bastante engenhosa pode ser dada com base na segunda relação de incerteza estudada no capítulo 4, a saber:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h \quad (4.11)$$

Assim, é possível, no efeito túnel, que se burle a conservação da energia por uma quantidade  $\Delta E = V - E$ , desde que o tempo decorrido nesta transgressão não exceda o intervalo  $\Delta t$  esperado de (4.11). Grosso modo, mesmo a noção de conservação da energia está sujeita às indeterminações de Heisenberg.

Para que não nos sintamos completamente perdidos neste novo mundo, vale lembrar que o efeito túnel ocorre também para ondas luminosas, de forma muito curiosa. Analisemos o experimento descrito na Fig. 5.6.



**Figura 5.6:** “Efeito Túnel” em Ondas Clássicas

Temos um prisma de vidro imerso no ar. No primeiro caso, um raio incidente na interface vidro-ar sofre reflexão total, ou seja, nada é transmitido pela interface. Entretanto, quando um segundo prisma de vidro é aproximado, fazendo com que o *gap* entre as duas interfaces vidro-ar seja pequeno, então a configuração de reflexão total é destruída, havendo a transmissão de uma parcela da luz pela interface do primeiro prisma, ao contrário do que ocorria antes. Isto quer dizer que quando se impôs uma barreira (*gap*) finita, houve um coeficiente de transmissão não-nulo. Parece-nos estranho, pois temos a impressão que o raio, de alguma forma, percebe se poderá ou não atravessar a barreira, meio que sentindo a presença do prisma. Na realidade, uma análise das equações do eletromagnetismo explicam o ocorrido sem sobressaltos.

Halliday e Resnick sugerem um experimento simples para verificar a ocorrência de tunelamento em ondas clássicas. O que eles sugerem é que se incline um copo cheio de água até que os raios de luz que chegam aos nossos olhos sejam provenientes de reflexão total nas paredes do copo. Nesta situação, veremos a parede prateada.

Devemos então umedecer um dedo e apertá-lo contra a parede do copo, pelo lado de fora. Neste caso, iremos ver, contra o fundo prateado, nossas impressões digitais, com as regiões de ranhura do dedo ainda prateadas. Isto quer dizer que vemos as regiões do dedo que estavam mais juntas à parede do copo (menor *gap*), sendo que as regiões mais distantes (ranhuras) tem um *gap* ainda muito grande para que vejamos o efeito túnel ocorrer.

O efeito túnel tem muitas aplicações práticas. Uma delas é o famoso *microscópio de tunelamento de varredura*. Neste microscópio, uma agulha de tungstênio percorre a superfície do material que se deseja analisar, sem no entanto, nela encostar. É mantida uma distância de alguns angstroms. A agulha tem uma pequena diferença de potencial em relação ao material, atraindo elétrons.

Quando há alguma ranhura na superfície, o *gap* entre a agulha e o espécime estudado aumenta, modificando o valor da corrente gerada pela diferença de potencial, segundo as previsões do efeito túnel. É esta variação na corrente de tunelamento que se transforma na imagem formada.

Uma outra aplicação importante é o *diodo túnel*. Este dispositivo é composto por uma região positiva, uma região negativa e uma região neutra entre as duas. A corrente no diodo é basicamente uma corrente de tunelamento pela região neutra. Esta corrente pode ser controlada variando-se externamente o potencial associado à barreira, o que varia a probabilidade de transmissão  $T$  (ver, por exemplo, a equação (5.28)).

O efeito túnel pode ainda ser verificado no decaimento alfa e num dispositivo denominado *junta Josephson*.

### **Bibliografia do Capítulo 5:**

[Böhr 1996] **N. Böhr**, *Física Atômica e Conhecimento Humano: Ensaio (1932-1957)*, Contraponto, 1996.

[Born 1986] **M. Born**, *Física Atômica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.

[Eisberg 1961] **R. Eisberg**, *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, 1961.

[Halliday e Resnick 1994] **D. Halliday, R. Resnick**, *Fundamentos da Física*, LTC, 1994.

[Heisenberg 1995] **W. Heisenberg**, *Física e Filosofia*, Editora UnB, 1995.

[Krane, 1983] **K. Krane**, *Modern Physics*, Wiley, 1983.

[Ohanian 1995] **H. Ohanian**, *Modern Physics*, Prentice Hall, Second Edition, 1995.

[Serway 1990] **R. Serway**, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders College Publishing, Third Edition, 1990.